***Конспект урока на тему:*** *«***Функции у = sin х и у = cos x, их свойства и графики (обобщающее занятие)»**

***Предмет: алгебра. 10 класс.***

***Автор: учитель математики МКОУ «Цухтамахинская СОШ».***

***Нугаева Хамис Магомедовна.***

Цели: детальнее рассмотреть функции у = sin х и у = cos х, их свойства и графики; обсудить периодичность этих функций.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

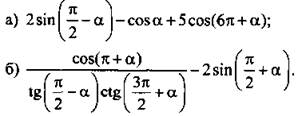
1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Вычислите image228

2. Упростите выражение:

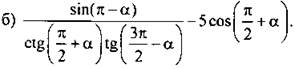


Вариант 2

1. Вычислите image230

2. Упростите выражение:

image231

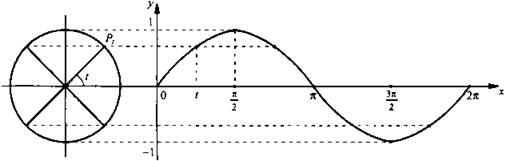


III. Изучение нового материала

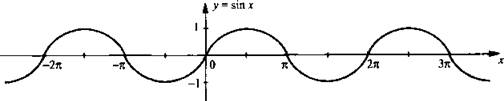
Из ранее изученного нам известны многие свойства двух основных тригонометрических функций - синуса и косинуса. Рассмотрим графики этих функций и на их основе детализируем такие свойства.

1. Функция y = sin x, ее свойства и график

Обсудим построение графиков функций синуса и косинуса. Сначала построим график функции синуса на отрезке [0; 2π]. Отметим на оси ординат точки (0; -1) и (0; 1), на оси абсцисс - точку (2π; 0). Разделим отрезок [0; 2π] и единичную окружность на 8 равных частей (учтите, что длина отрезка [0; 2π] равна 2π ≈ 6,28). Каждая такая часть равна π/4. Для построения точки графика с абсциссой t используем определение синуса. Отметим точку Рt на единичной окружности и проведем через Рt прямую, параллельную оси абсцисс. Точка пересечения этой прямой и прямой х = t искомая, так как ее ордината совпадает с ординатой точки Рt и по определению sin t равен ординате точки Рt.



На рисунке приведено построение восьми точек графика. Соединяя их плавной кривой, получаем эскиз графика синуса на отрезке [0; 2π]. Для построения графика функции вне этого отрезка учтем периодичность функции синуса, т. е. sin (х + 2πn) = sin х (где n - произвольное целое число). Поэтому во всех точках х0 + 2пn (где 0 < x0 < 2π) значения синуса совпадают. Следовательно, график синуса на всей прямой получается из построенного графика с помощью параллельных переносов его вдоль оси абсцисс (вправо и влево) на 2π, 4π, 6π и т. д. График функции синуса называется синусоидой. Отрезок [-1; 1] оси ординат, с помощью которого находили значения синуса, иногда называют линией синусов.



Используя построенный график, приведем основные свойства функции у = sin х:

1. Область определения D(y) = (-∞; +∞).

2. Функция нечетная (т. е. у(-x) = -e(x))> и ее график симметричен относительно начала координат.

3. Функция возрастает на отрезках вида image236 и убывает на отрезках вида http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image509.jpg где k ∈ Z.

4. Функция ограничена, т. е. -1 ≤ у(х) ≤ 1.

5. Наименьшее значение функции yнаим = -1 (достигается в точках вида http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image510.jpg) и наибольшее значение унаиб = 1 (достигается в точках вида http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image511.jpg).

6. Функция непрерывная.

7. Область значений Е(у) = [-1; 1].

8. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом Т = 2п, т. е. у(х + 2пk) = y(x).

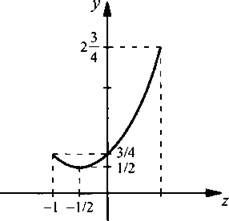
Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1

Найдем наименьшее и наибольшее значения функции: http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image512.jpg

а) В силу ограниченности функции у = sin х имеем неравенство -1 ≤ sin x ≤ 1. Умножим все части этого неравенства на положительное число 3 и получим неравенство того же знака -3 ≤ 3sin x ≤ 3. Вычтем их всех частей число 1: -4 ≤ 3sin х - 1 ≤ 2. Таким образом,yнаим = -4 и yнаиб = 2.

б) Используем основное тригонометрическое тождество (1) и в данной функции перейдем к величине sin х. Получим: http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image513.jpg Введем вспомогательную величину z = sin х, причем -1 ≤ z ≤ 1. Тогда необходимо найти наибольшее и наименьшее значения квадратичной функции http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image514.jpg на отрезке [-1; 1].

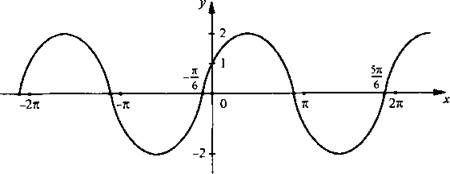


Графиком этой функции является парабола, направленная ветвями вверх (см. рисунок), вершина которой имеет координаты zB = -1/2 и http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image516.jpg В этой точке функция имеет наименьшее значение. Наибольшее значение функция имеет в точке z = 1, и оно равно http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image517.jpg Итак, получили: http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image518.jpg Поэтому http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image519.jpg

Пример 2

Построим график функции http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image520.jpg

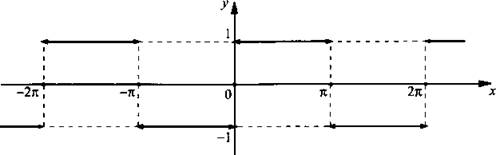
Такой график получается из графика функции у = х смещением на π/6 влево вдоль оси абсцисс и растяжением в 2 раза вдоль оси ординат.



Пример 3

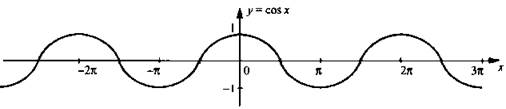
Построим график функции http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image522.jpg

Раскроем знак модуля и получим http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image523.jpg При sin х = 0 (т. е. х = пn, где n- любое целое число) данная функция не определена.



2. Функция у = cos x, ее свойства и график

Для построения графика функции косинуса учтем формулу приведения http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image525.jpg Поэтому значение косинуса в любой точке x0 равно значению синуса в точке http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image526.jpg Тогда график косинуса получается из графика синуса с помощью параллельного переноса на единиц влево вдоль оси абсцисс. Поэтому график функции у = cos х также является синусоидой.



Перечислим основные свойства функции у = cos x:

1. Область определения D(y) = (-∞; +∞).

2. Функция четная (т. е. y(-х) = y(х)), и ее график симметричен относительно оси ординат.

3. Функция возрастает на отрезках вида [-π + 2πk; 2πk] и убывает на отрезках вида [2πk; π + 2πk], где k ∈ Z.

4. Функция ограничена, т. е. -1 ≤ y(х) ≤ 1.

5. Наименьшее значение функции унаим = -1 (достигается в точках вида х = π + 2пk) и наибольшее значение унаиб = 1 (достигается в точках вида х = 2пk).

6. Функция непрерывная.

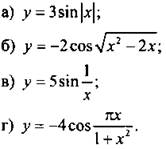
7. Область значений Е(у) = [-1; 1].

8. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом Т= 2п, т. е. у(х + 2пk) = у(х).

Рассмотрим наиболее типичные примеры.

Пример 4

Найдем область определения и область значений функции:



а) Для данной функции х может принимать любые значения, поэтому D(y) = R. Теперь найдем область значений функции. Так как -1 ≤ sin|x| ≤ 1, то умножим все члены этого неравенства на 3 и получим - 3 ≤ 3sin|x| ≤ 3 или -3 ≤ у ≤ 3, т. е. Е(у) = [-3; 3].

б) Аргумент данной функции существует при условии х2 - 2х ≥ 0. Решение этого неравенства х ∈ (-∞; 0]U[2; ∞), что и является областью определения функции у(х). Итак, D(y) = (-∞; 0]U[2; ∞). При изменении х в этих пределах величина http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image529.jpg меняется от 0 до ∞. Поэтому -1 ≤ cos z ≤ 1, тогда 2 ≥ -2cos z ≥ -2, или http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image530.jpg или -2 ≤ у ≤ 2, т. е. Е(у) = [-2; 2].

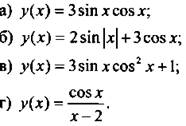
в) Аргумент этой функции существует при условии х ≠ 0 и D(y) = (-∞; 0)U(0; ∞). При изменении х в таких пределах величина z = 1/x изменяется в промежутках (-∞; 0)U(0; ∞). Тогда http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image531.jpg Поэтому Е(у) = [-5; 5].

г) Промежуточный аргумент http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image532.jpg этой функции определен при всех значениях х, поэтому D(y) = R. Найдем промежуток, в котором меняется z. Запишем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел - 1 и х2. Получим: http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image533.jpg Разделим обе части неравенства на положительное выражение 1 + x2 (при этом знак неравенства сохраняется) http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image534.jpg откуда       http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image535.jpg т. е. http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image536.jpg При изменении z в указанных пределах, как видно из единичной окружности, 0 ≤ cos z ≤ 1. Тогда 0 ≥ -4cos z ≥ -4 или -4 ≤ у ≤ 0. Поэтому Е(у) = [-4; 0].

Заметим, что во всех пунктах а - г рассматривались сложные функции. Для того чтобы найти значение тригонометрической функции, необходимо было сначала найти значение промежуточного аргумента. Этот аргумент, в свою очередь, являлся функцией аргумента х. В пункте а промежуточным аргументом была функция z = |х|, в пункте б - http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image537.jpg в пункте в - http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image538.jpg и в пункте г - http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image539.jpg

Пример 5

Установим четность или нечетность функции:



Для функций а-в область определения D(y) = R - симметричное множество. Для этих функций найдем у(-х).

а) http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image541.jpg Так как выполнено равенство y(-x) = -у(х), то данная функция по определению нечетная.

б) http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image542.jpg Так как выполнено равенство y(-x) = у(х), то данная функция по определению четная.

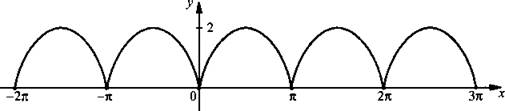
в) http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image543.jpg Видно, что равенство y(-х) = -y(х) не выполняется, так как перед числом 1 один и тот же знак «плюс». Равенство у(-х) = у(х) также не выполняется, так как знаки перед первыми слагаемыми в этих функциях противоположны. Поэтому данная функция не является ни четной, ни нечетной, т. е. определенной четности не имеет.

г) Область определения данной функции D(у) = (-∞; 2)U(2; ∞) не является симметричной, так как точка х = -2 входит в эту область, а симметричная точка х = -(-2) = 2 не входит. Поэтому данная функция определенной четности не имеет.

Пример 6

Построим график функции http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image544.jpg

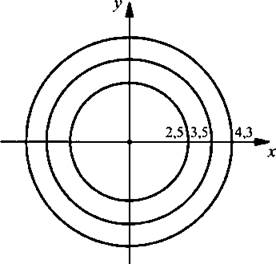
Учтем формулу понижения степени и запишем данную функцию в виде http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image545.jpg Теперь построим график y = 2|sinx|. Если sin x ≥ 0, то строим график функции у = 2 sin х. Если sin х < 0, то строим график функции у = -2sin х. Он получается отражением вверх относительно оси абсцисс частей графика у = 2sin х приsin х < 0.



Пример 7

Построим график уравнения cos(x2 + у2) = 1.

Так как выполнено равенство cos(x2 + у2) = 1, то аргумент косинуса х2 + у2 = 2πn, где n - 0, 1, 2, 3, ... . При n = 0 получаем уравнение х2 + у2 = 0, которое имеет единственное решение х = у = 0 (начало координат). При n ∈ N получаем уравнение окружности х2 + у2 = 2пn с центром в начале координат и радиуса http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image547.jpg Для различных натуральных n получаем семейство концентрических окружностей, радиусы которых http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image548.jpg т. е. http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image549.jpghttp://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image550.jpg и т. д. Итак, графиком данного уравнения являются начало координат и семейство концентрических окружностей.



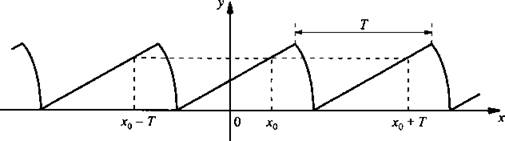
3. Периодичность функций у = sin х, у = cos x

Перейдем к следующему свойству функции - периодичности. Многие реальные явления и процессы имеют повторяющийся (периодический) характер. Например, минутная стрелка занимает одинаковое положение на циферблате часов через каждый час. Такого типа процессы называют периодическими, как и их функции.

Функция f(х) называется периодической с периодом Т (Т - некоторое действительное число, отличное от нуля), если:

1) для любого х из области определения функции значение аргумента х ± Т также принадлежит области определения функции;

2) выполняется равенство f(x + T) = f(x) = f(x - Т). Обычно под периодом функции понимают наименьший из всех положительных периодов (основной период функции).



Исходя из определения тригонометрических функций, нетрудно установить, что период функций sin x и cos х составляет 2π, период функций tg х и ctg х - π. Действительно, функции синуса и косинуса определены на всей числовой оси, sin (х + 2π) = sin х и cos (x+ 2π) = cos х для любого х. Аналогично области определения функций тангенса и котангенса включают как точку х, так и точки х ± π. При этом выполняются равенства tg(х + π) = tg х и ctg (х + π) = ctg x.

Пример 8

Докажем, что если функция f(х) периодическая с периодом Т, то при любом целом n ≠ 0 число nТ также период этой функции.

Пусть для определенностиn п = 4. Тогда нужно доказать, что число 4Т является также периодом функции f(х). Найдем http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image553.jpghttp://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image554.jpghttp://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image555.jpg Итак, было показано, что для любого х выполнено равенство f(x + 4T) = f(x). Поэтому по определению число 4Т является также периодом функции f(х).

Пример 9

Найдем период функции http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image556.jpg

Предположим, что эта функция периодическая с основным периодом Т. Тогда должно выполняться равенство http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image557.jpghttp://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image558.jpg Поэтому получим уравнение http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image559.jpg или  Т = 2пn, откуда http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image560.jpg Учитывая, что число Т – основной период данной функции, найдем http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image561.jpg

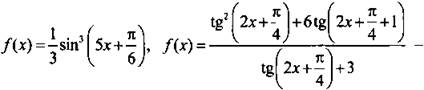
Аналогично можно показать, что для функции http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image562.jpg основной период также http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image563.jpg для функций http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image564.jpg и http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image565.jpg основной период http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image566.jpg Это обязательно надо помнить.

Отметим, что сумма, разность, произведение и частное двух периодических функций могут быть как периодической, так и непериодической функцией. В частности, алгебраическая сумма периодических функций будет функцией периодической, если периоды этих функций соизмеримы (т. е. если их отношение - число рациональное).

Пример 10

Найдем период функции http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image567.jpg

Функция f(х) является алгебраической суммой трех периодических функций, периоды которых, соответственно, http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image568.jpg Представим эти числа в виде дробей с одинаковыми знаменателями http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image569.jpghttp://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image570.jpg Видим, что эти числа соизмеримы и их общей мерой является число π/12. Для определения периода f(x) найдем наименьшее общее кратное чисел 12, 8 и 15, которое равно 120. Поэтому http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image571.jpg

Отметим также, что сложная функция, промежуточным аргументом которой служит периодическая функция, есть функция периодическая. Например,  функции периодические.

Пример 11

Докажем, что функция http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image573.jpg непериодическая.

Функция f(x) является суммой трех периодических функций, периоды которых, равны соответственно http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image574.jpg Коэффициенты http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image575.jpg стоящие перед π, являются несоизмеримыми числами. Числа http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image576.jpg иррациональные и могут быть представлены в виде десятичных бесконечных непериодических дробей. Поэтому нельзя сказать, в какое рациональное число раз такие числа различаются. Следовательно, данная функция непериодическая.

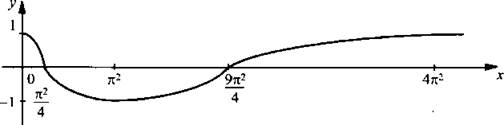
Определение периодической функции может быть использовано для доказательства непериодичности функций.

Пример 12

Докажем, что функция http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image577.jpg непериодическая.

Проведем доказательство от противного. Предположим, что функция периодическая с периодом Т. Тогда должно выполняться равенство http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image578.jpg Поэтому имеем уравнение http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image579.jpg Возведем обе части в квадрат: http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image580.jpg и найдем http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image581.jpg Видим, что величина Т не является числом и зависит от точки х. Имеется противоречие, и данная функция не является периодической.

В этом легко убедиться, построив график функции. Ее область определения D(f) = [0; +∞), область значений E(f) = [-1; 1]. Проследим за точками пересечения графика функции с осью абсцисс. Они определяются условием http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image582.jpg  (где n = 0, 1, 2, ...), откуда http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image583.jpg Посчитаем несколько первых таких точек: http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image584.jpg и т. д. Видим, что расстояние между соседними точками с увеличением jc возрастает. На рисунке приведен график (с нарушением масштаба).



IV. Контрольные вопросы

1. Основные свойства и график функции у = sin х.

2. Свойства функции у = cos x и ее график.

3. Как получить график функции у = cos x, используя график функции у = sin x?

4. Определение периодической функции.

5. Основной период функции.

6. Основной период функций http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image586.jpg и http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image587.jpg

7. Основной период функций http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image588.jpg и http://compendium.su/mathematics/algebra10/algebra10.files/image589.jpg

V. Задание на уроках

§ 10, № 2 (а, б); 3 (в, г); 5 (а, б); 9 (а); 10 (б); 11 (а, б); 12 (а); 13 (б); 14 (а, б); 15; 16 (a); 17;

§ 11, № 3 (а); 8 (б); 11 (а, б); 12 (в, г); 13 (а);

§ 12, № 1; 3; 7 (а, б); 9 (в, г).

VI. Задание на дом

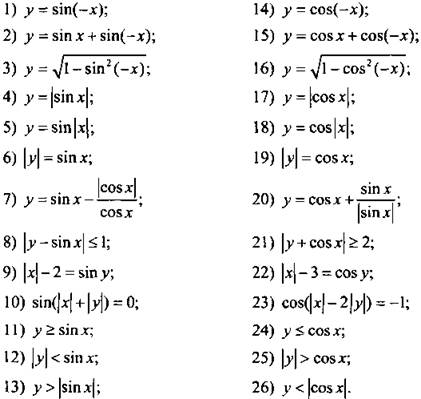
§ 10, № 2 (в, г); 3 (а, б); 5 (в, г); 9 (б); 10 (а); 11 (в, г); 12 (б); 13 (а); 14 (в, г); 16 (б); 18;

§ 11, № 3 (б); 8 (г); 11 (в, г); 12 (а, б); 13 (б);

§ 13, № 2; 4; 7 (в, г); 9 (а, б).

VII. Творческое задание

Постройте график функции, уравнения или неравенства:



VIII. Подведение итогов уроков